

A - 3 超伝導加速空洞の設計

先ず完全導体の円筒空洞の設計について簡単に説明し、次に実際にアルミで円筒空洞を作成した結果及び計算機での計算結果 (SUPERFISH) を示す。

1 . 完全導体の円筒空洞

μ 、 ϵ の非散逸性の誘電体で満たされた半径 a 、長さ d の完全導体の円筒空洞を考える。空洞の中心軸を Z 軸とし、端板の Z 座標を各々 0 、 d とする。

マクスウェルの方程式

$$\nabla \cdot \vec{D} = 4\pi\rho$$

$$\nabla \times \vec{H} - \left(\frac{1}{c}\right) \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \left(\frac{4\pi}{c}\right) \vec{J}$$

$$\nabla \times \vec{E} + \left(\frac{1}{c}\right) \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

より円筒内の時間依存性を $e^{-i\omega t}$ とすると $\rho = 0$ 、 $\vec{J} = 0$ より、

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0$$

$$\nabla \times \vec{B} = -\left(\frac{i\omega\mu\epsilon}{c}\right) \vec{E}$$

$$\nabla \times \vec{E} = \left(\frac{i\omega}{c}\right) \vec{B}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

上式で $\nabla \times (\nabla \times \vec{B})$ 、 $\nabla \times (\nabla \times \vec{E})$ を計算すると、

$$\left(\nabla^2 + \frac{\mu\epsilon\omega^2}{c^2}\right) \vec{E} = 0$$

$$\left(\nabla^2 + \frac{\mu\epsilon\omega^2}{c^2}\right) \vec{B} = 0$$

Z 方向の空間的变化を取出し

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E}(x, y)e^{\pm ikz - i\omega t}$$

$$\vec{B}(x, y, z, t) = \vec{B}(x, y)e^{\pm ikz - i\omega t}$$

$\nabla^2 = \nabla_t^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ であるから (Z 方向とそれに垂直な方向に分ける)、

$$\left(\nabla_t^2 + \frac{\mu\epsilon\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \vec{E} = 0$$

$$\left(\nabla_t^2 + \frac{\mu\epsilon\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \vec{B} = 0$$

電磁場を Z 方向とそれに垂直な方向に分けると、

$$\vec{E} = \vec{E}_z + \vec{E}_t$$

$$\vec{E}_z = E_z \vec{e}_3$$

$$\vec{E}_t = (\vec{e}_3 \times \vec{E}) \times \vec{e}_3$$

$$\vec{B} = \vec{B}_z + \vec{B}_t$$

$$\vec{B}_z = B_z \vec{e}_3$$

$$\vec{B}_t = (\vec{e}_3 \times \vec{B}) \times \vec{e}_3$$

これらを用いればマクスウェルの方程式は

$$\frac{\partial \vec{E}_t}{\partial z} + \frac{i\omega}{c}(\vec{e}_3 \times \vec{B}_t) = \nabla_t E_z$$

$$\vec{e}_3 \cdot (\nabla_t \times \vec{E}_t) = \frac{i\omega}{cB_z}$$

$$\frac{\partial \vec{B}_t}{\partial z} - \frac{i\mu\epsilon\omega}{c}(\vec{e}_3 \times \vec{E}_t) = \nabla_t B_z$$

$$\vec{e}_3 \cdot (\nabla_t \times \vec{B}_t) = -\frac{i\mu\epsilon\omega}{cE_z}$$

$$\nabla_t \cdot \vec{E}_t = -\frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$\nabla_t \cdot \vec{B}_t = -\frac{\partial B_z}{\partial z}$$

整理すると \vec{E}_t 、 \vec{B}_t は、

$$\vec{E}_t = \frac{1}{\gamma^2} \left[\nabla_t \left(\frac{\partial E_z}{\partial z} \right) - \left(\frac{i\omega}{c} \right) \vec{e}_3 \times \nabla_t B_z \right]$$

$$\vec{B}_t = \frac{1}{\gamma^2} \left[\nabla_t \left(\frac{\partial B_z}{\partial z} \right) + \left(\frac{i\mu\epsilon\omega}{c} \right) \vec{e}_3 \times \nabla_t E_z \right]$$

$$\text{ここで } \gamma^2 = \frac{\mu\epsilon\omega^2}{c^2} - k^2$$

上式より、 E_z と B_z が分かれば \vec{E}_t と \vec{B}_t が決定される。

z 方向に伝搬する入射波と反射波の重ね合せの電磁場を考えているので、

$$\begin{aligned} \vec{E}(x, y, z, t) &= \vec{E}_-(x, y) e^{ikz - i\omega t} + \vec{E}_+(x, y) e^{-ikz - i\omega t} \\ &= \left[(\vec{E}_- + \vec{E}_+) \cos(kz) + i(\vec{E}_- - \vec{E}_+) \sin(kz) \right] e^{-i\omega t} \end{aligned}$$

$$\therefore \vec{E}(x, y, z) = \vec{E}_1(x, y) \cos(kz) + \vec{E}_2(x, y) \sin(kz)$$

ここで \vec{E}_1 、 \vec{E}_2 は複素ベクトル関数である。

完全導体の境界条件より $z = 0$ 、 d で $\vec{E}_t = 0$ であるから上式より、

$$z = 0: \vec{E}_t(x, y, z = 0) = \vec{E}_{1t}(x, y) = 0$$

$$z = d: \vec{E}_t(x, y, z = d) = \vec{E}_{2t}(x, y) \sin(kd) = 0$$

$$\therefore \sin(kd) = 0 \quad \therefore k = \frac{p\pi}{d}; \quad p = 0, 1, 2, \dots$$

$$\therefore \vec{E}_t(x, y, z) = \vec{E}_{2t}(x, y) \sin\left(\frac{p\pi z}{d}\right); \quad p = 0, 1, 2, \dots$$

また完全導体の境界条件より $z = 0$ 、 d で $B_z = 0$ であるから同様に
して、

$$B_z(x, y, z) = B_{2z}(x, y) \sin\left(\frac{p\pi z}{d}\right); \quad p = 0, 1, 2, \dots$$

従って T M 波の場合 ($B_z = 0$)、

$$\vec{E}_z(x, y, z) = \vec{E}_{1z}(x, y) \cos\left(\frac{p\pi z}{d}\right) = \psi \cos\left(\frac{p\pi z}{d}\right) \vec{e}_3; \quad p = 0, 1, 2, \dots \text{と書くことが}$$

でき、

$$E_z = \psi \cos\left(\frac{p\pi z}{d}\right)$$

$$\vec{E}_t = -\frac{p\pi}{d\gamma^2} \sin\left(\frac{p\pi z}{d}\right) \nabla_t \psi$$

$$\vec{B}_t = \frac{i\mu\epsilon\omega}{c\gamma^2} \cos\left(\frac{p\pi z}{d}\right) \vec{e}_3 \times \nabla_t \psi$$

また T E 波の場合 ($E_z = 0$)、

$$\vec{B}_z(x, y, z) = \vec{B}_{2z}(x, y) \sin\left(\frac{p\pi z}{d}\right) = \psi \sin\left(\frac{p\pi z}{d}\right) \vec{e}_3; \quad p = 0, 1, 2, \dots \text{と書け同様に、}$$

$$B_z = \psi \sin\left(\frac{p\pi z}{d}\right)$$

$$\vec{E}_t = -\frac{i\omega}{c\gamma^2} \sin\left(\frac{p\pi z}{d}\right) \vec{e}_3 \times \nabla_t \psi$$

$$\vec{B}_t = \frac{p\pi}{d\gamma^2} \cos\left(\frac{p\pi z}{d}\right) \nabla_t \psi$$

ここで固有値問題を解く。

$$(\nabla_t^2 + \gamma^2)\psi = 0; \quad \gamma^2 = \frac{\mu\epsilon\omega^2}{c^2} - \left(\frac{p\pi}{d}\right)^2$$

円筒座標で書直すと、

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} \psi + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \psi + \gamma^2 \psi = 0$$

これに $\psi(r, \theta) = R(r) \cdot \Theta(\theta)$ を代入しを両辺に $\frac{r^2}{R\Theta}$ を乗じると、

$$\frac{r^2}{R} \frac{\partial^2}{\partial r^2} R + \frac{r}{R} \frac{\partial}{\partial r} R + r^2 \gamma^2 = -\frac{1}{\Theta} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \Theta$$

これが常に成立するので両辺は定数。これを m^2 とおくと右辺= m^2 より、

$$\Theta(\theta) = \Theta_0 e^{\pm im\theta}; \quad m \text{ は整数 } (\because \Theta \text{ は周期 } 2\pi \text{ を持つ})$$

一方、左辺= m^2 より、

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} R + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} R + \left(\gamma^2 - \frac{m^2}{r^2}\right) R = 0$$

$\rho = \gamma r$ とおくと $\frac{\partial}{\partial r} = \gamma \frac{\partial}{\partial \rho}$ より上式は、

$$\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} R + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} R + \left(1 - \frac{m^2}{\rho^2}\right) R = 0$$

これはベッセルの微分方程式である。この解は、 $J_m(\rho)$ 及び $H_m(\rho)$ であるが、 $H_m(\rho)$ は $r=0$ で発散し円筒内の電磁場には不適。適当な解は $J_m(\rho)$ である。

我々の空洞で使うTM波では、

側面（完全導体）の境界条件より $E_z(\rho = \gamma a) = 0$
 $J_m(\rho) = 0$ となる n 番目の根を ρ_{mn} とすると、

$$\begin{aligned} m = 0 : & \quad \rho_{0n} = 2.405, \quad 5.520, \quad 8.654, \quad \dots \\ m = 1 : & \quad \rho_{1n} = 3.832, \quad 7.016, \quad 10.173, \quad \dots \\ m = 2 : & \quad \rho_{2n} = 5.136, \quad 8.417, \quad 11.620, \quad \dots \end{aligned}$$

$\gamma a = \rho_{mn}$ より、 $\rho = \gamma r = \frac{\rho_{mn}}{a} r$ であるから ψ は、

$$\psi = \psi_0 J_m \left(\frac{\rho_{mn}}{a} r \right) e^{\pm im\theta}; \quad m \text{ は整数、 } n = 1, 2, \dots$$

共振周波数は $\gamma^2 = \frac{\mu\epsilon\omega^2}{c^2} - k^2$ より、

$$\omega_{mp} = \frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\gamma^2 + k^2} = \frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{\rho_{mn}}{a} \right)^2 + \left(\frac{p\pi}{d} \right)^2}$$

我々が使う最低次のモード TM_{010} は、

$$E_z = E_0 J_0 \left(\frac{2.405\rho}{a} \right) e^{-i\omega t}$$

$$H_\theta = -i \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_0 J_1 \left(\frac{2.405\rho}{a} \right) e^{-i\omega t}$$

$$\omega_{010} = \frac{2.405c}{\sqrt{\mu\epsilon a}}$$

上式より、1300MHzでは半径 $a = 8.83$ cm。
 ここで $TM_{010}(p=0)$ では、 ω は d に無関係である。

電子が丁度半周期でセルを通過すると多連空洞で連続的に加速でき

る。

電子の速度はほぼ光速であるから 1300MHz では、セルの長さ d は、

$$d = c / (2 \cdot 1300 \cdot 10^6) = 11.5\text{cm}$$

尚、加速には使えないが TE 波では、

$$\psi = \psi_0 J_m \left(\frac{\rho_{mn}}{a} r \right) e^{\pm im\theta}; \quad m \text{ は整数、 } n = 1, 2, \dots$$

$$\text{境界条件 } \left. \frac{\partial B_z}{\partial n} \right|_{s=0} = 0 \text{ より、} \quad \left(\frac{\partial B_z}{\partial n} = \vec{n} \cdot \nabla B_z \right)$$

$J_m(\rho) = 0$ となる n 番目の根を ρ'_{mn} とすると、

$$m = 0 : \quad \rho'_{0n} = 3.832, \quad 7.016, \quad 10.174, \quad \dots$$

$$m = 1 : \quad \rho'_{1n} = 1.841, \quad 5.331, \quad 8.536, \quad \dots$$

$$m = 2 : \quad \rho'_{2n} = 3.054, \quad 6.706, \quad 9.970, \quad \dots$$

$\gamma a = \rho'_{mn}$ であり、 $\rho = \gamma r = \frac{\rho'_{mn}}{a} r$ 。従って ψ は、

$$\psi = \psi_0 J_m \left(\frac{\rho'_{mn}}{a} r \right) e^{\pm im\theta}; \quad m \text{ は整数、 } n = 1, 2, \dots$$

共振周波数は TM 波と同様にして

$$\omega_{mnp} = \frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{\rho'_{mn}}{a} \right)^2 + \left(\frac{p\pi}{d} \right)^2}$$

最低次のモード TE_{111} は、

$$H_z = H_0 J_1 \left(\frac{1.841\rho}{a} \right) \cos\theta \sin\left(\frac{\pi z}{d} \right) e^{-i\omega t}$$

$$\omega_{111} = \frac{1.841c}{\sqrt{\mu\epsilon a}} \sqrt{1 + 2.912 \left(\frac{a}{d} \right)^2}$$

である。

2. アルミ円筒空洞

アルミ円筒空洞を用い共振周波数及び Q 値の計算値と実測値の比較を行った。

共振周波数 1300MHz のアルミ円筒空洞(長さ 11.54cm、半径 8.83cm) のを用いて上記測定を行った。測定状況及びアルミ円板中央に取付けたピックアップ用のアンテナを図 1 に示す。

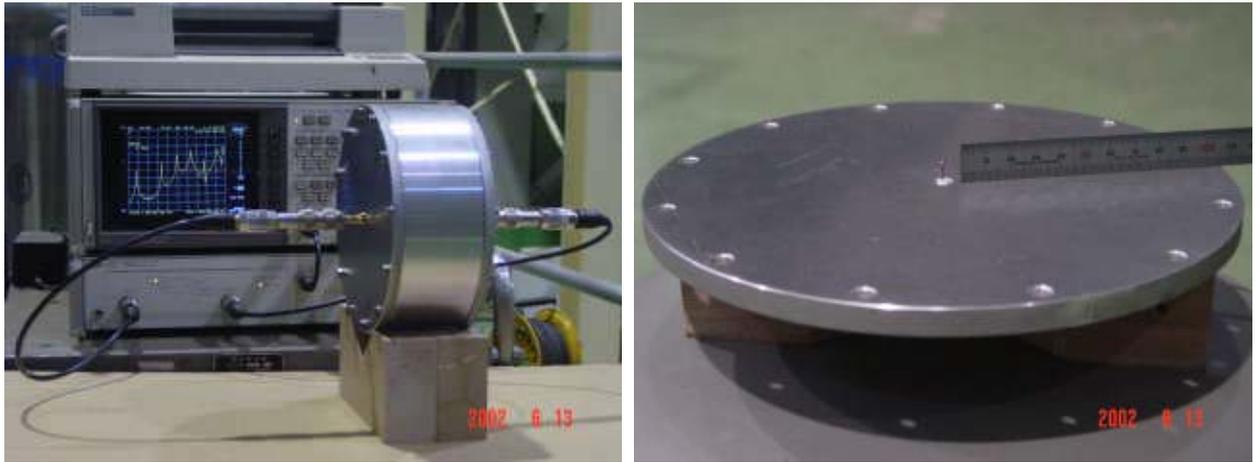


図 1 アルミ円筒空洞の測定とそのアンテナ

共振周波数の解析値及び共振周波数及び Q_L のネットワークアナライザによる実測値を表 1 に示す。測定周波数は解析値に良く一致した。

表 1 アルミ円筒空洞の共振周波数及び Q_L の実測値

m n p (TMモード)	共振周波数 f_a [MHz] (解析値)	共振周波数 f_m [MHz] (実測値)	$f_a - f_m$ [MHz]	Q_L (f_m / f の実測値)
010	1300.5	1299.3	1.2	9856
011	1838.7	1836.5	2.2	6356
012	2906.38	2903.0	3.8	6430
020	2983.8	2982.3	1.5	8876
021	3254.6	3252.2	2.4	4726
022	3957.4	3953.7	3.7	4558
110	2071.4	2070.3	1.1	14469
111	2445.4	2440.7	4.7	5157
112	3324.0	3320.2	3.8	1830
210	2776.2	2783.1	6.9	912
211	3065.5	3076.4	10.9	6292

このアルミ空洞の周波数を、メッシュ寸法を 0.1cm として計算機 (SUPERFISH) で計算した。結果を表 2 に示す。計算値は解析値と

良く一致した。

表2 アルミ円筒空洞の SUPERFISH による共振周波数の計算値

m n p (T Mモード)	共振周波数 f_a [MHz] (解析値)	共振周波数 f_c [MHz] (計算値)	$f_a - f_c$ [MHz]
010	1300.5	1299.5	1.0
011	1838.7	1837.4	1.3
012	2906.38	2904.9	1.9
020	2983.8	2982.9	0.9
021	3254.6	3253.5	1.1
022	3957.4	3955.8	1.6

また、このアルミ円筒空洞の Q_0 などを SUPERFISH で計算した値も、表3の通り解析値と良く一致した。ここでアルミの電気伝導率は $3.541 \times 10^7 [(\text{m})^{-1}]$ とした。

表3 アルミ円筒空洞の SUPERFISH による計算値と解析値の比較

	解析値	SUPERFISH
f [MHz]	1300.5	1299.5
Q_0	2.13×10^4	2.13×10^4
R_s []	1.20×10^{-3}	1.20×10^{-3}
R_{sh} []	4.18×10^6	4.18×10^6

3 . SUPERFISH による L バンド単セル空洞の計算

計算に使った L バンド単セル空洞の形状を図2に、メッシュサイズ 0.1cm での Q_0 などの計算値を表4に示す。ニオブの電気伝導率は $0.8 \times 10^7 [(\text{m})^{-1}]$ 、加速電場 1[MV/m] とした。

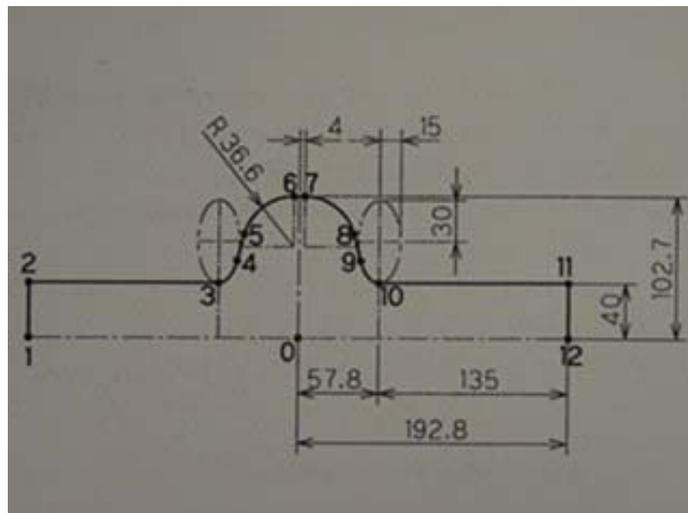


図2 SUPERFISH で計算した空洞形状 (L バンド単セル空洞)

表 4 SUPERFISH での計算結果

	計算結果
f [MHz]	1294.9
Q_0	29168
R_s []	9.388×10^{-3}
R_{sh} []	2.96×10^6
形状因子 []	273.8